به نام خدا

فیزیک ۲ فصل ۲

میدان الکتریکی

اگر یک بار الکتریکی مانند بار نقطه‌ای q را در فضای خالی قرار دهیم این بار الکتریکی در فضای پیرامون خود یک میدان نیروی الکتریکی ایجاد می‌کند به این معنا که اگر بار نقطه‌ای دومی مانند بار q_0 را در هر نقطه از این فضا قرار دهیم یک نیروی الکتریکی را مطمئناً تجربه خواهد کرد

شدت میدان الکتریکی

برای آنکه میدان الکتریکی توزیع بارهای مختلف را از نظر قدرت و شدت با هم مقایسه کنیم همچنین برای آنکه قدرت و شدت میدان الکتریکی را در نقاط مختلف فضای پیرامون بار الکتریکی را با هم مقایسه کنیم کمیتی به نام شدت میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

شدت میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا بنا به تعریف نیروی وارد بر واحد بار مثبت $(+1c)$ در آن نقطه از فضا است.

بنابراین اگر بخواهیم شدت میدان الکتریکی را در یک نقطه از فضا مانند نقطه A که با علامت $\times$ در شکل مقابل دیده می‌شود محاسبه کنیم

مطابق تعریف فوق به ترتیب زیر می‌توانیم عمل کنیم:

ابتدا یک بار نقطه‌ای مثبت با اندازه دلخواه (اما کوچک) مانند بار q_0 که به بار آزمون موسوم است را در نقطه مورد نظر قرار می‌دهیم و نیروی الکتریکی $\vec{F}$ وارد بر بار آزمون را پیدا می‌کنیم

سپس با توجه به آنکه نیروی الکتریکی $\vec{F}$ متناسب با مقدار بار آزمون یعنی q_0 است اگر بردار نیروی $\vec{F}$ را بر بار q_0 تقسیم کنیم بردار حاصل در واقع نیروی وارد بر واحد بار مثبت یعنی مطابق تعریف فوق شدت میدان الکتریکی است

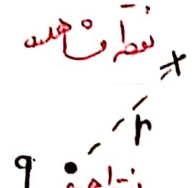
شدت میدان الکتریکی $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$

Scanned with CamScanner

واحد E : $\frac{\text{نیوتن}}{\text{کولن}} = \frac{N}{C}$

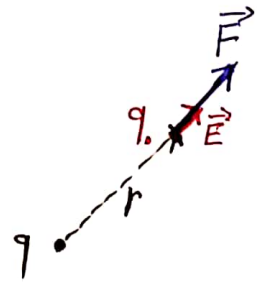
توجه کنید که شدت میدان الکتریکی یک کمیت برداری است و جهت آن همان جهت نیروی وارد بر بار مثبت است.

شدت میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای



اکنون با استفاده از روش فوق میدان الکتریکی را در یک نقطه دلخواه فضا در مجاورت یک بار نقطه‌ای محاسبه می‌کنیم

نقطه‌ای از فضا که بار الکتریکی تولید کننده میدان، در آن قرار گرفته است نقطه‌ی چشمه و نقطه‌ای از فضا که محاسبه میدان در آن نقطه مورد نظر است نقطه میدان یا نقطه مشاهده، می‌نامند فرض کنید فاصله نقطه چشمه تا نقطه مشاهده r باشد



بار آزمون q_0 با اندازه دلخواه را در نقطه مشاهده قرار می‌دهیم و نیروی الکتریکی وارد بر آن را با استفاده از قانون کولن محاسبه می‌کنیم

$$F = k\frac{|q q_0|}{r^2}$$

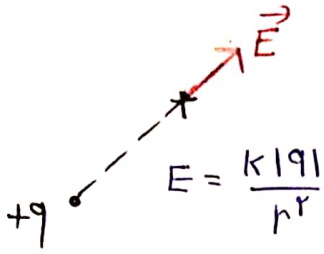
$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{k\frac{|q q_0|}{r^2}}{q_0} = k\frac{|q|}{r^2}$$

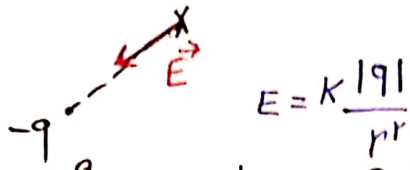
با توجه به رابطه $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ بردار $\vec{E}$ هم جهت با نیروی $\vec{F}$ است. بنابراین اگر بار چشمه (یعنی q) مثبت باشد نیرو و میدان هر دو رو به خارج (مانند شکل فوق) است

اگر بار چشمه منفی باشد نیروی $\vec{F}$ و میدان $\vec{E}$ مطابق شکل رو به هر دو رو به داخل هستند

توجه کنید که در هر دو حالت اندازه شدت میدان $E = k\frac{|q|}{r^2}$ آنگونه که باید همیشه مثبت است. زیرا اندازه یک بردار باید همیشه مثبت باشد

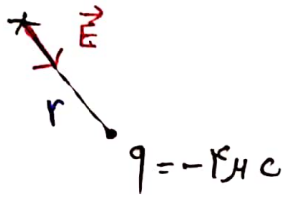
خلاصه نتایج فوق که از این به بعد بدون اثبات مورد استفاده قرار می‌گیرد در اشکال زیر نمایش داده شده است.





به یاد داشته باشیم در اینجا نیز $K = 9\times10^9 \frac{N.m^2}{C^2}$ و بنابراین در محاسبه اندازه میدان با استفاده از رابطه $E = K\frac{|q|}{r^2}$ ، q باید برحسب C (کولن) و r برحسب m (متر) باشد

مثال ۱۱: میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای $q = -4\mu C$ را در نقطه‌ای دلخواه به فاصله $r = 3cm$ محاسبه کنید و جهت آن را در یک شکل نمایش دهید

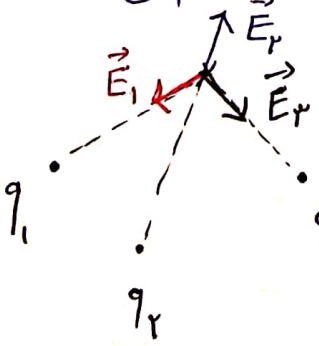


$$q = -4\mu C = -4\times10^{-6} C$$
$$r = 3cm = 3\times10^{-2} m$$
$$E = K\frac{|q|}{r^2} = \frac{9\times10^9 \times 4\times10^{-6}}{(3\times10^{-2})^2} = 4\times10^7 \frac{N}{C}$$

میدان حاصل از چند بار نقطه‌ای

قبلاً گفته شد که شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ در واقع نیروی الکتریکی وارد بر واحد بار مثبت است. پس شدت میدان الکتریکی $\vec{E}$ نیز مانند نیروی الکتریکی از اصل جمع آثار پیروی می‌کند.

بنابراین برای محاسبه میدان الکتریکی حاصل از چند بار نقطه‌ای، باید میدان حاصل از هر بار نقطه‌ای را به تنهایی محاسبه و سپس بردارهای $\vec{E}$ حاصل از همه بارهای نقطه‌ای را با هم جمع برداری کنیم



میدان الکتریکی کل $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ اصل برهم نهی (یا اصل جمع آثار)

میدان حاصل از بار q_1 به تنهایی

q_2 " " " "

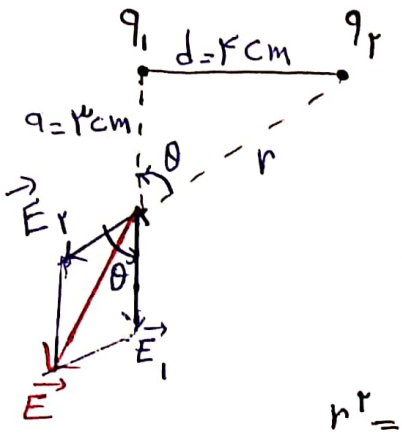
q_3 " " " "

در شکل فوق فرض کرده‌ایم بارهای q_1 و q_3 منفی و بار q_2 مثبت هستند

توصیه کنید که مجموع فوق در واقع یک جمع برداری است

Scanned with CamScanner

مثال ۲: بارهای نقطه $q_1 = 12\,nC$ و $q_2 = 25\,nC$ مطابق شکل روبرو به فاصله‌ی $d = 4cm$ از یکدیگر قرار گرفته‌اند. میدان الکتریکی E را در نقطه‌ای به فاصله‌ی $3cm$ از بار q_1 و دقیقاً زیر آن را محاسبه و جهت میدان را بر روی شکل نمایش دهید.



$$q_1 = 12\,nC = 12\times10^{-9}\,C$$
$$q_2 = 25\,nC = 25\times10^{-9}\,C$$

$$r^2 = 3^2 + 4^2 = 9+16 = 25 \longrightarrow r = \sqrt{25} = 5\,cm$$

$$E_1 = \frac{K|q_1|}{a^2} = \frac{9\times10^9 \times 12\times10^{-9}}{(3\times10^{-2})^2} = 12\times10^4 \ \frac{N}{C}$$

$$E_2 = \frac{K|q_2|}{r^2} = \frac{9\times10^9 \times 25\times10^{-9}}{(5\times10^{-2})^2} = 9\times10^4$$

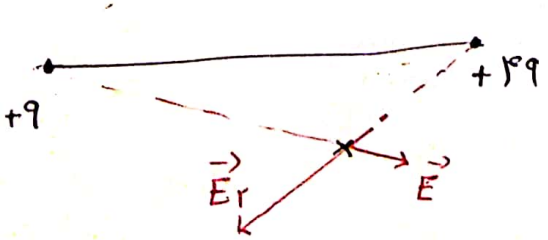
$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\theta} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$E = \sqrt{(12\times10^4)^2 + (9\times10^4)^2 + 2\times12\times10^4\times9\times10^4\times0.6} = 18.8\times10^4 \ \frac{N}{C}$$

مثال ۳: بارهای نقطه‌ای $+9$ و $+49$ مطابق شکل روبرو در فاصله‌ی L از یکدیگر قرار گرفته‌اند. نقطه‌ای را پیدا کنید که میدان الکتریکی کل در آن نقطه صفر باشد.

توجه کنید که دو بار نقطه‌ای $+9$ و $+49$ در هر نقطه از فضا دو میدان الکتریکی $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ ایجاد می‌کنند و میدان الکتریکی کل در آن نقطه، برآیند $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ یعنی $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ خواهد بود. اگر بخواهیم میدان کل $\vec{E}$ صفر باشد بردارهای $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم اندازه و خلاف جهت هم باشند.

نقطه‌ای که میدان کل در آن صفر است نمی‌تواند خارج از خط واصل دو بار باشد زیرا در این صورت $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ مطابق شکل روبرو مطمئناً خلاف جهت هم (با زاویه $180°$) خواهند بود.

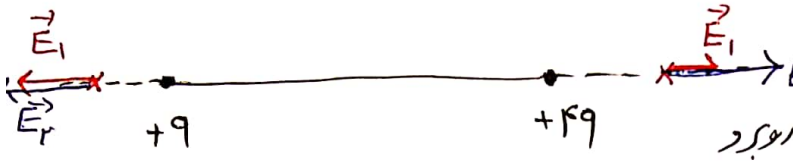


بنابراین نقطه‌ای که میدان کل در آن صفر است باید در امتداد خط واصل دو بار نقطه‌ای باشد.

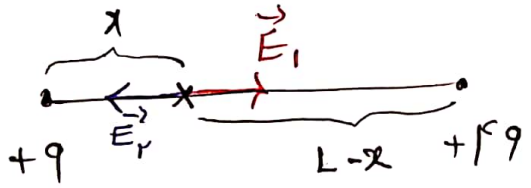
Scanned with CamScanner

⑨

از طرف دیگر نقطه ای که میدان کل در آن صفر است نمی تواند روی خط واصل سمت چپ بار $+9$ یا سمت راست بار $+4q$ باشد زیرا در این صورت مطابق شکل روبرو میدان های $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ هم جهت بوده و حذف جهت نخواهند بود



بنابراین نقطه ای که میدان کل در آن صفر است را روی خط واصل و بین دو بار نقطه ای باید جستجو کرد



برای آنکه میدان کل صفر شود $E_1 = E_2$

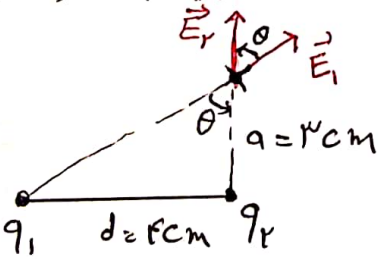
$$E_1 = \frac{k|9|}{x^2} = \frac{k9}{x^2}$$

$$E_2 = \frac{k|4q|}{(L-x)^2} = \frac{k\times 4q}{(L-x)^2}$$

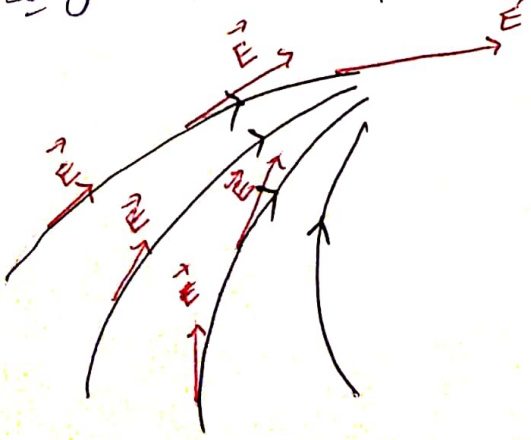
$$\rightarrow \frac{k9}{x^2} = \frac{4k9}{(L-x)^2} \rightarrow (L-x)^2 = 4x^2 \xrightarrow{\text{از دو طرف جذر می گیریم}}$$

$$L-x = 2x \longrightarrow L = 3x \longrightarrow \boxed{x = \frac{L}{3}}$$

تکلیف ① فصل ۲ در مثال ② میدان الکتریکی کل را در فاصله $3cm$ از q_2 و در سمت بالای سر آن محاسبه و جهت آن را روی شکل نمایش دهید



تکلیف ② فصل ۲ در مثال ③ اگر بار $+4q$ را با $-4q$ عوض کنیم مسأله را دوباره حل کنید



خطوط نیروی (خطوط میدان یا خطوط شار)

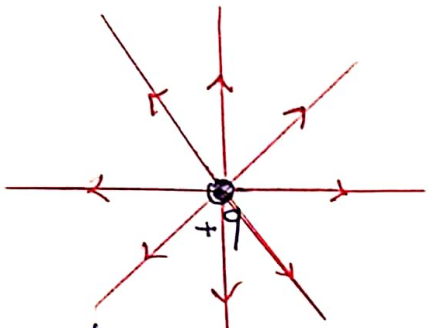
خطوط میدان الکتریکی منحنی های پیوسته ای هستند که دارای جهت هستند و هیچگاه یکدیگر را قطع نمی کنند هرچند که مطابق شکل رو برو می توانند بی نهایت به هم نزدیک شوند.

Scanned with CamScanner

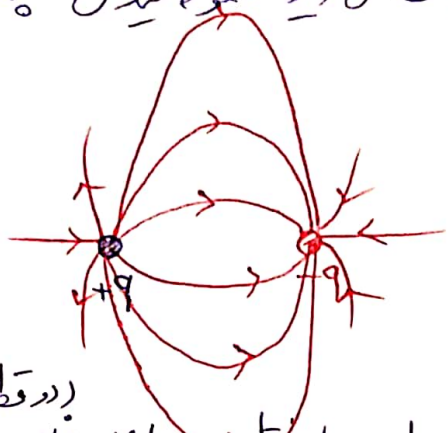
بردار میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا مطابق شکل مماس بر این منحنی ها و هم جهت با آن است و اندازهٔ میدان الکتریکی E متناسب با تراکم این خطوط است.

خطوط میدان الکتریکی در واقع تصویری یکجا از بردارهای $\vec{E}$ در تمام نقاط فضا را نمایش می‌دهد

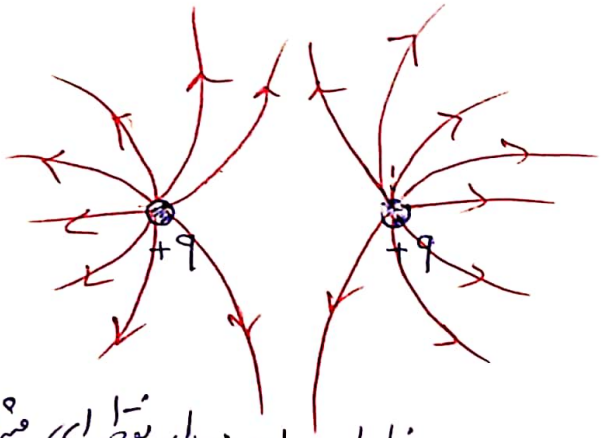
در اشکال زیر خطوط میدان چند توزیع بار نمایش داده شده است.



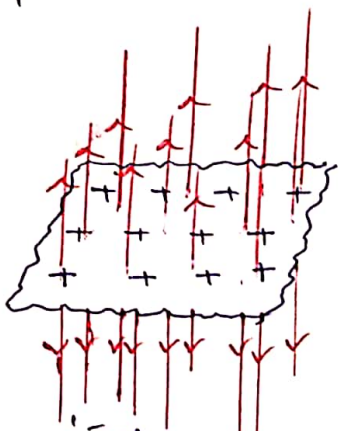
الف) خطوط میدان یک بار نقطه‌ای مثبت



ب) خطوط میدان دو بار نقطه‌ای هم اندازه مخالف (دو قطبی)



ج) خطوط میدان دو بار نقطه‌ای مثبت

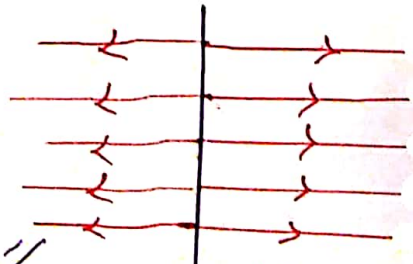


د) خطوط میدان صفحه بار ناهمناهی

در شکل د)، خطوط میدان راست، موازی و هم فاصله و عمود بر صفحه بار یکنواخت ناهمناهی است

چنین میدانی که را که اندازه و جهت آن در فضا ثابت است را میدان یکنواخت می‌نامند

اگر صفحه بار را عمود بر صفحه در نظر بگیریم شکل د) را بصورت ساده‌تر زیر نیز می‌توان رسم کرد

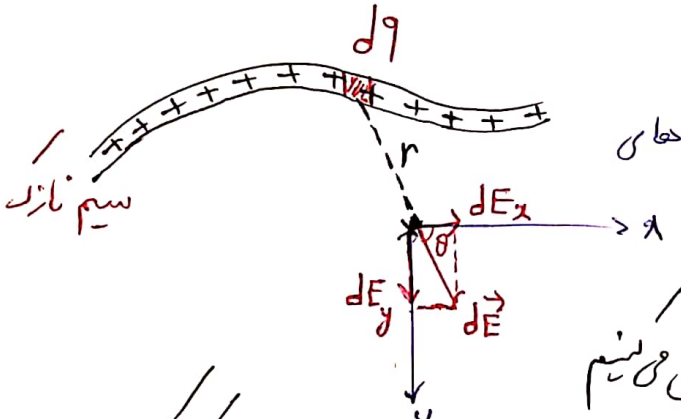


شکل د) از یک از یک زاویه دید دیگر

Scanned with CamScanner

توزیع بارهای پیوسته و محاسبه‌ی میدان حاصل از آن‌ها

در مثال ۳ در فصل اول دیدیم که بار $q = -1 \times 10^{-7}$ C شامل $n = 6.25 \times 10^{9}$ الکترون است. اگر بار q را روی سیم رسانایی قرار داده شود مقدار الکترون‌ها در بار q بقدری زیاد است که الکترون‌ها می‌توانند سرتاسر سطحی سیم را پوشش دهند بطوریکه با تقریب بسیار خوبی می‌توان گفت که بطور پیوسته در سطح سیم توزیع شده است. چنین توزیع باری را توزیع بار پیوسته می‌نامند.



برای محاسبه میدان چنین توزیع بارهایی قدم‌های زیر را به ترتیب طی می‌کنیم:

۱- جزء کوچکی از توزیع بار را در نظر گرفته فرض می‌کنیم بار آن dq باشد (d نماد دیفرانسیل است و dq به معنی بار بی‌نهایت کوچک است).

۲- با در نظر گرفتن جزء بار بی‌نهایت کوچک dq به عنوان یک بار نقطه‌ای، میدان حاصل از آن را محاسبه و آن را از $d\vec{E}$ می‌نامیم

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2}$$

۳- بردار $d\vec{E}$ را در دو راستای مناسب تجزیه و مؤلفه‌های آن را محاسبه می‌کنیم. این مؤلفه‌ها را dE_x و dE_y می‌نامیم

$$dE_x = dE\cos\theta \quad , \quad dE_y = dE\sin\theta$$

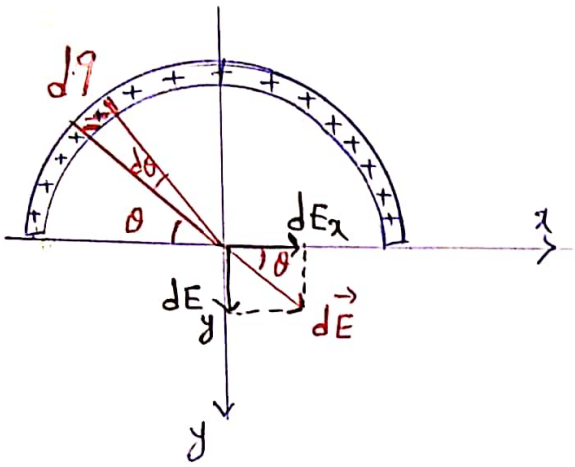
۴- با انتگرال‌گیری از dE_x، در واقع مؤلفه‌های x همه‌ی جزء بارها (میدان حاصل از) در سرتاسر سیم نازک را با هم جمع می‌کنیم $E_x = \int dE_x$ و به همین ترتیب $E_y = \int dE_y$ جمع مؤلفه‌های y میدان حاصل از همه‌ی جزء بارهایی که هرکدام بار نقطه‌ای محسوب می‌شوند محاسبه خواهد شد.

به این ترتیب E_x مؤلفه x میدان کل و E_y مؤلفه y میدان کل محاسبه می‌شود بنابراین

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$ اندازه‌ی میدان کل

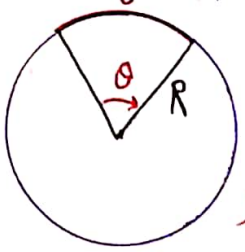
Scanned with CamScanner

مثال ۴- بار الکتریکی q مطابق شکل روی برد برداری سیم نازکی به شکل نیم دایره به شعاع R توزیع شده است. میدان حاصل از آن را در مرکز نیم دایره محاسبه کنید



$$dE = \frac{K\,dq}{R^2}$$

با توجه به اینکه:



$l = R\theta$ طول کمان روبرو به زاویه‌ی مرکزی θ

مشروط بر آنکه θ برحسب واحد رادیان باشد

طول کل سیم بار دار $R\pi$ و طول جزء بار $Rd\theta$ خواهد بود. حال به تناسب زیر توجه کنید!

طول	q
$R\pi$	
$Rd\theta$	$dq = ?$

$$\longrightarrow dq = \frac{Rd\theta}{R\pi} \times q = \frac{q\,d\theta}{\pi}$$

$$\longrightarrow dE = K\frac{\frac{q\,d\theta}{\pi}}{R^2} = \frac{Kq}{\pi R^2}\,d\theta$$

حال بردار $\vec{dE}$ را به دو مؤلفه‌ی dE_x و dE_y در دو راستای x و y نمایش داده شده در شکل تجزیه می‌کنیم

$$dE_x = dE\cos\theta = \frac{Kq}{\pi R^2}\cos\theta\,d\theta$$

$$dE_y = dE\sin\theta = \frac{Kq}{\pi R^2}\sin\theta\,d\theta$$

اکنون با انتگرال گیری از dE_x و dE_y مؤلفه‌های میدان کل را محاسبه می‌کنیم!

مؤلفه‌ی x میدان کل $E_x = \int dE_x = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{Kq}{\pi R^2}\cos\theta\,d\theta = \frac{Kq}{R^2}\left(\sin\theta\right)_0^{\pi} = \frac{Kq}{R^2}(\sin\pi - \sin 0)$

$= 0$

توجه کنید که حدود انتگرال (از صفر تا π) طوری در نظر گرفته شده که میدان حاصل کل سیم مورد محاسبه قرار گیرد همچنین توجه کنید که صفر شدن مؤلفه E_x میدان کل (یعنی جمع dE_xها) را با توجه به تقارن توزیع بار قابل پیش بینی بود. به همین ترتیب!

مؤلفه‌ی y میدان کل $E_y = \int dE_y = \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{Kq}{\pi R^2}\sin\theta\,d\theta$

$$= \frac{Kq}{\pi R^2}\left(-\cos\theta\right)_0^{\pi} = \frac{Kq}{\pi R^2}(-\cos\pi + \cos 0)$$

$$= \frac{Kq}{\pi R^2}[+1 - (-1)] = \frac{2Kq}{\pi R^2}$$

Scanned with CamScanner

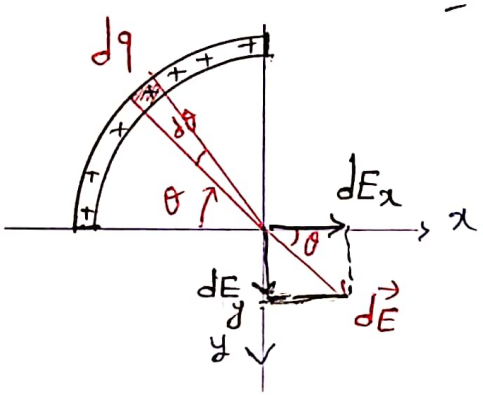
(۱۳)

اندازه میدان کل $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{0 + E_y^2} = E_y$

$$\longrightarrow E = \frac{2K\lambda}{\pi R^2}$$

توجه کنید که جهت میدان کل به سمت پایین است زیرا $E_x = 0$

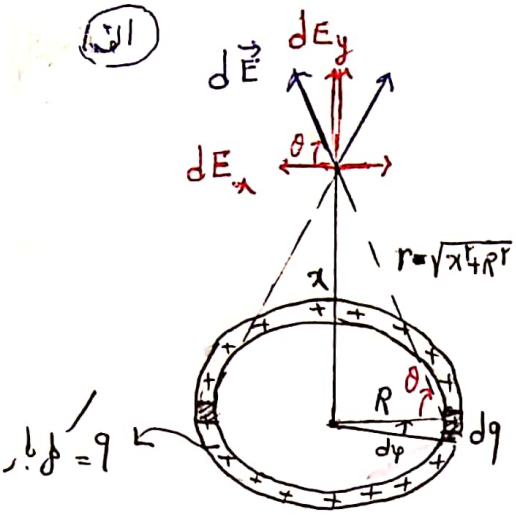
تکلیف ۳: در مثال ۴ فرض کنید سیم نازک به شکل ربع دایره باشد و مسأله را دوباره حل کنید!



توجه کنید که تنها تفاوت ها در اینجا این است که طول سیم $R\frac{\pi}{2}$ است و حدود انتگرال ها باید صفر تا $\frac{\pi}{2}$ باشد.

Scanned with CamScanner

مثال ۱: بار الکتریکی q بطور یکنواخت بر روی حلقه نازک به شکل حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع R توزیع شده است. میدان الکتریکی حاصل از این توزیع بار را روی محور تقارن حلقه در نقطه‌ای به فاصله‌ی x از مرکز حلقه محاسبه کنید.



$$dq = \lambda R d\varphi \quad , \quad \lambda = \frac{q}{2\pi R}$$

$$\rightarrow dq = \frac{q}{2\pi R} d\varphi \qquad E = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\frac{q}{2\pi R} d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q R\, d\varphi}{8\pi^2 \varepsilon_0 R r^2}$$

$$dE_x = dE\cos\theta \qquad dE_y = dE\sin\theta$$

به دلیل تقارن

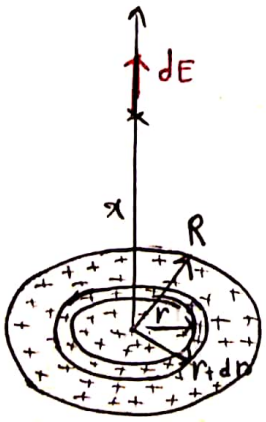
E_x مؤلفه‌ی x میدان کل $E_x = \int dE_x = 0$

$$dE_y = dE\sin\theta = \underbrace{\frac{q\, d\varphi}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}}_{dE} \times \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}}_{\sin\theta} = \frac{q x\, d\varphi}{8\pi^2\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ثابت

$$E_y = \int dE_y = \frac{q x}{8\pi^2\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \boxed{\frac{q x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

مثال: بار الکتریکی با چگالی سطحی یکنواخت σ بر روی سطح یک دیسک دایره‌ای نازک توزیع شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ای واقع بر محور تقارن و به فاصله‌ی x از مرکز دیسک محاسبه کنید.



مساحت نوار دایره‌ای $ds = 2\pi r dr$

$\longrightarrow$ بار واقع بر نوار دایره‌ای $dq = \sigma\, ds = \sigma 2\pi r dr$

میدان حاصل از نوار دایره‌ای $dE = \frac{dq \cdot x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma 2\pi r dr\, x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x\sigma r dr}{2\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

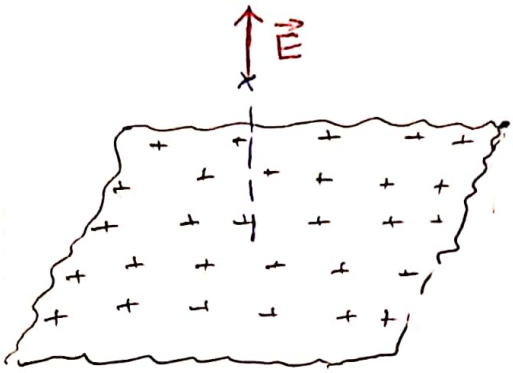
Scanned with CamScanner

(ب)

میدان مجموعه نوارها (میدان صفحه دایره‌ای) $E = \int dE = \int_{r=0}^{R} \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

با توجه به انتگرال $\int \frac{x dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$$E = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)_0^R = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$



میدان یکنواخت است $= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ میدان صفحه بار نامتناهی $= \lim_{R\to\infty} E$

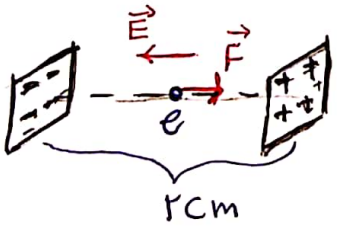
- بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی

با توجه به تعریف میدان الکتریکی $\vec{E}$:

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \longrightarrow \vec{F} = \vec{E}q \longrightarrow$ اگر بار نقطه‌ای q مثبت باشد

$\vec{F}$ نیروی وارد بر بار نقطه‌ای q در نقطه‌ای از فضا که در آنجا میدان الکتریکی $\vec{E}$ است هم جهت با میدان الکتریکی $\vec{E}$ است و اگر بار نقطه q منفی باشد $\vec{F}$ خلاف جهت $\vec{E}$ است

مثال: در فضای بین دو تیغه رسانا که بارهای مخالف دارند میدان الکتریکی یکنواخت برقرار شده است. الکترونی که حالت سکون از روی تیغه با بار منفی رها می‌شود پس از چه زمانی با سطح تیغه مقابل در فاصله ۲cm از تیغه اول برخورد می‌کند. سرعت الکترون در لحظه برخورد با تیغه دوم چقدر است. بزرگی میدان الکتریکی در اینجا چقدر است



$F = Eq \xrightarrow{E=\text{ثابت}} F = \text{ثابت} \xrightarrow{F=ma} a = \text{ثابت}$

$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ جابجایی $\quad v_0 = 0$

$2\text{cm} = \frac{1}{2} a \times (1.5\times10^{-8})^2 \longrightarrow a = 17.78\times10^{13}\ \frac{m}{s^2}$

Scanned with CamScanner

(۴۰)

$$V = V_0 + at = 0 + 17,78 \times 10^{13} \times 1,5 \times 10^{-8} = 2,67 \times 10^{6} \frac{m}{s}$$

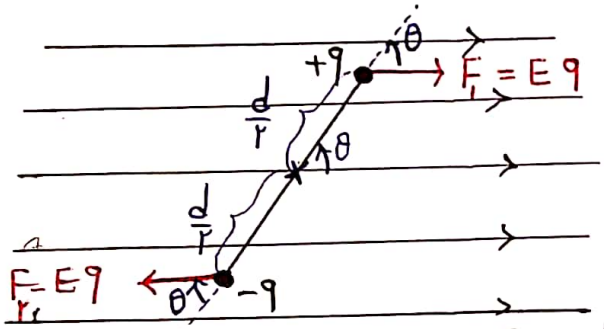
کار انجام شده توسط میدان $W = Fd = Eqd$

قضیه کار و انرژی $W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times 9,1 \times 10^{-31} \times (2,67 \times 10^{6})^2$

$$\rightarrow E \times 1,6 \times 10^{-19} \times 0,02 = \frac{1}{2} \times 9,1 \times 10^{-31} \times (2,67 \times 10^{6})^2$$

$$\rightarrow E \simeq 1000 \frac{N}{C}$$

- دوقطبی در میدان الکتریکی



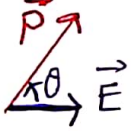
گشتاور نیروی F_1 $\tau_1 = F_1 \times \frac{d}{2} \sin\theta$

$= Eq \times \frac{d}{2} \sin\theta$ درون رو

گشتاور نیروی F_2 $\tau_2 = F_2 \times \frac{d}{2} \times \sin\theta = Eq \times \frac{d}{2} \sin\theta = \tau_1$ درون رو

گشتاور نیروی کل $\tau = \tau_1 + \tau_2 = Eqd\sin\theta = EP\sin\theta$

در آن P بزرگی بردار گشتاور دوقطبی است $P = qd$



$P = qd$ $\rightarrow$ $\boxed{\vec{\tau} = \vec{P} \times \vec{E}}$ درون رو

بردار گشتاور دوقطبی $\vec{P}$ برداری است که راستای آن موازی محور دوقطبی، جهت آن از منفی به طرف مثبت و اندازه آن

$$\Delta U = -W_c \xrightarrow{\text{کار نیروی پایستار}} U(\tfrac{\pi}{2}) - U(\theta) = -\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} -\tau \, d\theta = +\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} EP\sin\theta \, d\theta$$

اگر انرژی پتانسیل دوقطبی در وضعیت قائم $\theta = \frac{\pi}{2}$ را مرجع صفر انرژی پتانسیل فرض کنیم یعنی

$$U(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$U(\theta) = -PE\cos\theta \rightarrow \boxed{U = -\vec{P} \cdot \vec{E}}$$

Scanned with CamScanner

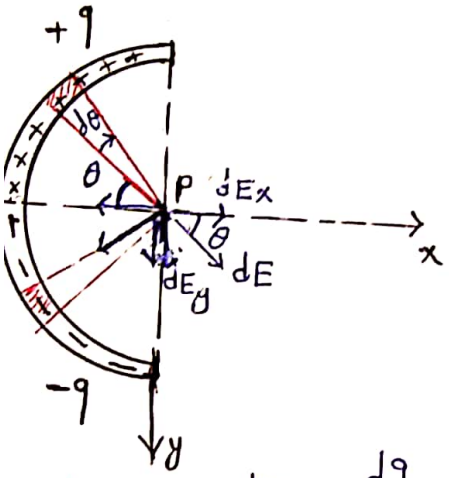
مثال: کار لازم برای چرخاندن یک دوقطبی الکتریکی به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه در میدان یکنواخت به بزرگی $E = 46 \frac{N}{C}$ در حالتی که $P = 3.2 \times 10^{-25} C.m$ و زاویه‌ی اولیه برابر ۶۴° است چقدر می‌شود؟

$$W = \Delta U = -PE\cos(180 + 64) - (-PE\cos 64)$$

$$= PE\cos 64 + PE\cos 64 = 2PE\cos 64$$

$$= 2 \times 3.2 \times 10^{-25} \times 46 \times 0.44 = 1.22 \times 10^{-23} J$$

مثال: در شکل روبرو میله‌ی شیشه‌ای نازکی را نشان داده‌ایم که به صورت نیم دایره‌ای به شعاع $r = 5 cm$ خم شده است. بارهای $+q = 4.5 pC$ و $-q = -4.5 pC$ به ترتیب در نیمه‌ی بالایی و نیمه‌ی پائینی آن بطور یکنواخت



الف) مقدار و جهت (نسبت به محور x) میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در نقطه P در مرکز نیم دایره بدست آورید.

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda r d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$dE_y = dE\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\sin\theta d\theta \longrightarrow E_y = \int dE_y$$

مؤلفه‌ی y میدان کل $E_y = 2\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\sin\theta d\theta$

ضریب ۲ برای احتساب E_y حاصل از بارهای منفی وارد شده است.

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(-\cos\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

با توجه به تقارن $E_x = \int dE_x = 0$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{0 + E_y^2} = E_y \longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

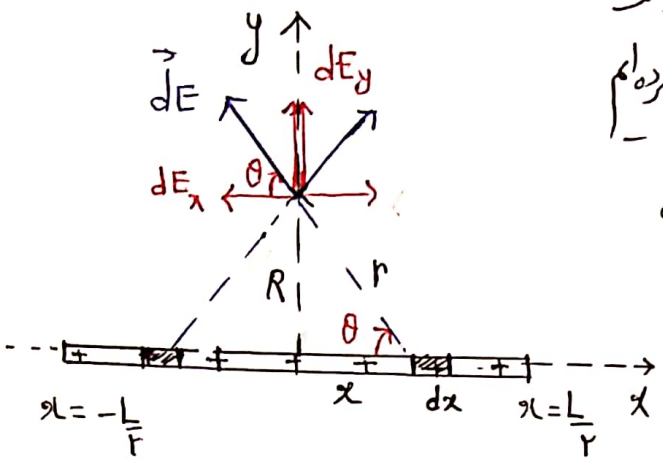
λ بار در واحد طول $\lambda = \frac{q}{\frac{\pi r}{2}} = \frac{2q}{\pi r} \longrightarrow E = \frac{q}{\pi^2\varepsilon_0 r^2} = \frac{4.5 \times 10^{-12}}{(3.14)^2 \times 1.9 \times 10^{-12} \times (0.05)^2} = 9224 \frac{N}{C}$

چون میدان در جهت محور y است جهت میدان نسبت به محور x زاویه 90° می‌سازد

Scanned with CamScanner

مثال: در شکل روبرو بار مثبت $q = 7.81 pC$ بطور یکنواخت در امتداد میله‌ی نارسانای نازکی به طول $L = 12.5 cm$ توزیع کرده‌ایم

الف) مقدار و سو، جهت (نسبت به محور x) میدان الکتریکی تولید شده در نقطه P در نا صله $R = 9 cm$ از میله در روی عمود منصف آن را بدست آورید



$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)} \qquad dE_x = -dE\cos\theta \;,\; dE_y = dE\sin\theta$$

به دلیل تقارن $E_x = \int dE_x = 0$

$$dE_y = dE\sin\theta = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)} \times \frac{R}{(x^2+R^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \int dE_y = \int_{x=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\lambda R}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dx}{(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ضریب ۲ با تغییر حدود انتگرال حاصل شده است. توجه کنید که انتگرالده یک تابع زوج است.

با توجه به انتگرال $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

$$E_y = \frac{\lambda R}{1\pi\varepsilon_0} \left(\frac{x}{R^2\sqrt{x^2+R^2}} \right)_0^{\frac{L}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + R^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}$$

$$E_x = 0 \longrightarrow E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \frac{L}{\sqrt{L^2+4R^2}}$$

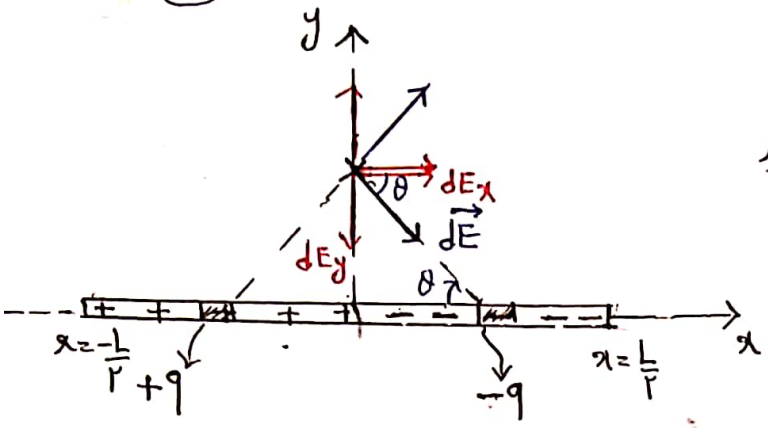
$$\lambda = \frac{q}{L} \longrightarrow E = \frac{\frac{q}{L}}{2\pi\varepsilon_0 R} \frac{L}{\sqrt{L^2+4R^2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R\sqrt{L^2+4R^2}}$$

$$E = \frac{7.81 \times 10^{-12}}{2 \times 3.14 \times 8.9 \times 10^{-12} \sqrt{(0.125)^2 + 4 \times (0.06)^2} \times 0.06} =$$

میدان خط بار متناهی $E = \lim_{L \to \infty} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \frac{L}{\sqrt{L^2+R^2}} = \lim_{L \to \infty} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \frac{L}{\sqrt{L^2(1+\frac{R^2}{L^2})}} = \boxed{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$

Scanned with CamScanner

(ی)



تکلیف: در مثال فوق فرض کنید بار $-q$ مطابق شکل در یک نیمه و بار $+q$ در نیمه‌ی دیگر توزیع شده، باشد و مسأله را دوباره حل کنید.

Scanned with CamScanner